**Министерство на образованието и науката**
**Съюз на математиците в България**

---

# Пролетно математическо състезание "проф. Дочо Дочев"

**Русе, 30 март 2024 г.**

**Русе, 2024 г.**

**Условия, кратки решения и критерии за оценяване**

**Задача 8.1.** Намерете всички двойки $(x, y)$ от реални числа, за които

$$4y^4 + x^4 + 12y^3 + 5x^2(y^2 + 1) + y^2 + 4 = 12y.$$

*Отговор.* $(0, -2)$ и $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

*Решение.* (Първи начин) Полагаме $t = x^2 \geq 0$ и разглеждаме даденото като квадратно уравнение относно $t$. Дискриминантата на $t^2 + 5t(y^2 + 1)t + 4y^4 + 12y^3 + y^2 - 12y + 4 = 0$ е

$$\begin{aligned} D &= 25(y^2 + 1)^2 - 16y^4 - 48y^3 - 4y^2 + 48y - 16 \\ &= 9y^4 - 48y^3 + 46y^2 + 48y + 9 \\ &= 9y^4 - 18y^2 + 9 - 48y(y^2 - 1) + 64y^2 \\ &= (3y^2 - 3)^2 - 2 \cdot 8y(3y^2 - 3) + (8y)^2 \\ &= (3y^2 - 8y - 3)^2, \end{aligned}$$

откъдето корените са $t_1 = \frac{1}{2}(-5y^2 - 5 + 3y^2 - 3 - 8y) = -y^2 - 4y - 4 = -(y + 2)^2 \leq 0$, $t_2 = \frac{1}{2}(-5y^2 - 5 - 3y^2 + 3 + 8y) = -4y^2 + 4y - 1 = -(2y - 1)^2 \leq 0$. Следователно $t = 0$, $x = 0$ и за $(x, y)$ получаваме решенията $(0, -2)$ и $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

(Втори начин) Имаме неравенствата $x^4 \geq 0$, $5x^2(y^2 + 1) \geq 0$ и $4y^4 + 12y^3 + y^2 - 12y + 4 = (2y - 1)^2(y + 2)^2 \geq 0$. Сборът на левите страни е 0 тогава и само тогава, когато всяка от тях е равна на 0. Първите две водят до $x = 0$, а третата – до $y = -2$ или $y = \frac{1}{2}$.

**Оценяване**. (6 точки) При първото решение: 1 т. за полагане $t = x^2 \geq 0$; 2 т. за $D = (3y^2 - 8y - 3)^2$; 1 т. за корена $-(y + 2)^2 \leq 0$; 1 т. за корена $-(2y - 1)^2 \leq 0$; 1 т. за завършване. При второто решение: Общо 1 т. за $x^4 \geq 0$ и $5x^2(y^2 + 1) \geq 0$; 3 т. за $4y^4 + 12y^3 + y^2 - 12y + 4 = (2y - 1)^2(y + 2)^2 \geq 0$; 1 т. за аргумента, че сбор на неотрицателни събираеми е 0 само ако всяко от тях е 0; 1 т. за завършване.

**Задача 8.2.** Точките $A$, $B$, $Y$ и $C$ лежат в този ред на окръжност $k$ с център $O$, като $BC = 2$ см, $\angle BAY = 42^\circ$ и $\angle CAY = 78^\circ$. Известно е, че окръжността $\omega$ през точките $A$, $O$ и $B$ се допира до правата $BY$. Окръжността през точките $A$ и $C$, допираща се до правата $CY$, пресича $\omega$ за втори път в точката $N$. Да се намери:

а) дължината на отсечката $BO$;     б) големината на ъгъла $\angle YAN$.

*Отговор.* а) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см   б) $36^\circ$.

*Решение.* а) Явно $\angle BAC = \angle BAY + \angle CAY = 120^\circ$, съответно $\angle BOC = 360^\circ - 2\angle BAC = 120^\circ$. Така ако $M$ е средата на $BC$, то $OM \perp BC$ (поради $BO = OC$), $\angle BOM = 60^\circ$ и $BM = \frac{BC}{2} = 1$. Сега при $BO = x$ от триъгълника $BOM$ имаме $OM = \frac{x}{2}$ от $\angle OBM = 30^\circ$ и $x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1^2$ от Питагоровата теорема, съответно $x^2 = \frac{4}{3}$ и $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

б) От $k$ и допирането имаме $\angle ANB = \angle AOB = 180^\circ - 2\angle BAO = 180^\circ - 2\angle OBY = 180^\circ - 2(90^\circ - \angle YCB) = 2\angle YCB$. Оттук $\angle ABY = \angle ABO + \angle OBY = 2\angle OAB = 180^\circ - \angle AOB =$

$180^\circ - 2\angle YCB$ и сега от другата окръжност пресмятаме $\angle ANC = 180^\circ - \angle ACY = \angle ABY = 180^\circ - 2\angle YCB$. Следователно $\angle ANB + \angle ANC = 180^\circ$, т.е. $N$ лежи на $BC$. Остава да съобразим, че $\angle NAC = \angle BCY = \angle BAY$ от допирането и $\angle YAN = \angle CAY - \angle CAN = \angle CAY - \angle BAY = 36^\circ$.

**Оценяване.** (6 точки) 2 т. за а), от които общо 1 т. за $\angle BOC = 120^\circ$ и въвеждането на $M$ и 1 т. за получаване на дължината на $BO$; 4 т. за б), от които 1 т. за намиране на $\angle ANB$, 1 т. за намиране на $\angle ANC$, 1 т. за извод, че $N$ лежи на $BC$ и 1 т. за намиране на $\angle YAN$.

**Задача 8.3.** На дъската отначало е записано трицифрено естествено число $n$. Двама играчи, А и Б, извършват ходове, редувайки се, като А е пръв. Който е на ход, намалява числото на дъската с някой негов собствен делител (т.е. различен от 1 и от самото число). Например ако в някакъв момент числото на дъската е 6, то може да се намали с 2, след което числото на дъската вече ще е 4. Който не може да направи ход, губи, а другият побеждава. Известно е, че играчът А има начин да победи, както и да играе Б. Колко са всички възможни $n$?

*Отговор.* 448

*Решение.* Ако на дъската има просто число, играчът губи по дефиниция. Ако на дъската има четно число, което не е степен на 2, то играчът винаги може да го намали с негов нечетен делител, оставяйки на дъската нечетно число. Ако числото на дъската е нечетно и бъде намалено с негов (нечетен) делител $a$, т.е. число от вида $ab$ е заменено с $a(b-1)$, то полученото число е четно и не е степен на двойката. Следователно ако началното число е четно и не е степен на двойката, играчът винаги може да извърши ход, гарантиращ му, че за следващия си ход ще получи отново естествено число от същия вид. Така четно число, което не е степен на двойката, е печеливша позиция, а нечетно число е губеща позиция.
Остава да анализираме случаите, когато числото на дъската е $2^m$ за естествено $m$. В този случай умалителят трябва да е $2^k$ за естествено $k < m$. Ако $k < m-1$, то получената позиция $2^k(2^{m-k}-1)$ е четна и не е степен на двойката, така че би била печеливша за противника и следователно неприемлив ход. И така, трябва $k = m-1$. Играейки по този начин, единият играч ще получава на дъската четните степени на 2, а другият – нечетните. Отчитайки, че 2 е губеща позиция, заключаваме, че четните степени на 2 са печеливши позиции, а нечетните степени на 2 – губещи.
Окончателно подходящите $n$ са четните числа, които не са нечетни степени на двойката. Сред дадените има $900 : 2 - 2 = 448$ такива (изключихме $128 = 2^7$ и $512 = 2^9$).

**Оценяване.** (7 точки) 2 т. за доказване, че четна позиция със собствен нечетен делител е печеливша, а нечетна – губеща; 1 т. за доказване, че $2^k$ за $k < m-1$ е неприемлив ход при $2^m$; 2 т. за доказване, че $2^m$ печеливша за четно $m$ и губеща при нечетно; 2 т. за завършване.

**Задача 8.4.** Неотрицателните реални числа $x$, $y$, $z$ са такива, че $(x+y)(y+z)(z+x) = 1$. Означаваме с $m$ и $M$ съответно най-малката и най-голямата възможна стойности на израза $A = (xy + yz + zx)(x + y + z)$.

а) Да се намерят $m$ и $M$.

б) Съществува ли тройка от неотрицателни рационални числа $(x, y, z)$, изпълняващи даденото равенство, за която $A = m$?

*Отговор.* а) 1 и $\frac{9}{8}$ б) не.

*Решение.* а) Неравенството $(xy+yz+zx)(x+y+z) \geq 1 = (x+y)(y+z)(z+x)$ е еквивалентно на $xyz \geq 0$. Равенство се достига само когато една от променливите, да речем $x$, е 0, а другите две (в случая $y$ и $z$) са какви да е с $yz(y+z) = 1$; една възможност е $y = 1$ и $z = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Неравенството $(xy + yz + zx)(x + y + z) \leq \frac{9}{8}$ е еквивалентно на $9(x + y)(y + z)(z + x) - 8(xy + yz + zx)(x + y + z) \geq 0$, т.е. на $x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + x^2z + xz^2 \geq 6xyz$. Последното е вярно от неравенството между средноаритметично и средногеометрично, приложено за шестте събираеми вляво, с равенство само при $x = y = z$ и $8x^3 = 1$, т.е. $x = y = z = \frac{1}{2}$.

б) Предвид разсъжденията в а), достатъчно е да докажем, че уравнението $yz(y+z) = 1$ няма решение в (положителни) рационални числа. Да допуснем противното и нека $y = \frac{p}{r}$, $z = \frac{q}{r}$ е решение (с естествени $p, q, r$), в което сме привели дробите под общ знаменател. Тогава $pq(p + q) = r^3$, като след съкращаване на общ делител на $p$, $q$, $r$, ако е необходимо, можем да считаме, че НОД$(p, q, r) = 1$. Всъщност, тук вече НОД$(p, q) = 1$, тъй като в противен случай техен общ прост делител би бил такъв и на $r$, противоречие с НОД$(p, q, r) = 1$. Така числата $p$, $q$ и $p+q$ са две по две взаимнопрости и понеже произведението им е точен куб, то непременно $p = a^3$, $q = b^3$ и $p + q = c^3$ за някакви естествени числа $a$, $b$, $c$. Така получихме $a^3 + b^3 = c^3$ за някакви естествени $a$, $b$, $c$, което е невъзможно (частен случай на т.нар. Велика теорема на Ферма).

**Оценяване.** (7 точки) 4 т. за а), от които по 1 т. за доказване на $A \geq 1$, доказване на $A \leq \frac{9}{8}$, пример с $A = 1$ и пример с $A = \frac{9}{8}$; 3 т. за б), от които 1 т. за свеждане до $pq(p + q) = r^3$ с НОД$(p, q, r) = 1$; 1 т. за пълна обосновка, че всеки от трите множителя е точен куб, 1 т. за завършване. Не се отнемат точки при липсата на ясно цитиране на факта, че $a^3 + b^3 = c^3$ няма решение в естествени числа. Точки само за верни отговори не се присъждат.

**Задача 9.1.** Да се реши неравенството:

$$\frac{x^2 - |x-1| - 4}{x-4} \geq 2x - 1.$$

*Отговор.* $x \in (-\infty; 1] \cup (4; 7]$.

*Решение.* Да отбележим, че $x \neq 4$ и $|x-1| = x-1$ за $x > 1$, в противен случай $|x-1| = 1-x$.
Случай 1. $x > 1$.
Разкриваме модула и привеждаме под общ знаменател. Получаваме:

$$\frac{x^2 - 8x + 7}{x-4} \leq 0.$$

Разлагаме числителя:

$$\frac{(x-7)(x-1)}{x-4} \leq 0.$$

От тук получаваме решението $x \in (4, 7]$.
Случай 2. $x \leq 1$.
Разкриваме модула и привеждаме под общ знаменател. Получаваме:

$$\frac{x^2 - 10x + 9}{x - 4} \leq 0.$$

Разлагаме числителя:

$$\frac{(x-9)(x-1)}{x-4} \leq 0.$$

От тук получаваме решението $x \in (-\infty, 1]$.
Окончателното решение е обединението на двата интервала.

**Оценяване.** (6 точки) 1 т. за разкриване на модула и дефиниционно множество, по 2 т. за случай, 1 т. за отговор.

**Задача 9.2** Даден е триъгълникът $ABC$ и $M$ - среда на $AB$. Дадени са ъглите $\angle ABC = 30^\circ$ и $\angle BCM = 105^\circ$. Да се докаже, че $CM.AC = BM.BC$.

*Решение.* Построяваме $AA_1$ височината от т.$A$ в $\triangle ABC$. Да отбележим че тя лежи на продължението на $BC$, защото този триъгълник е тъпоъгълен. Триъгълникът $\triangle AA_1B$ е правоъгълен с ъгъл $30^\circ$. Следователно $AA_1 = AM = A_1M = BM = x$. Последователно намираме директно:
$\angle CMB = 45^\circ$ (от сбора на ъгли в $\triangle CMB$);
$\angle A_1MA = 60^\circ$ ($\triangle AMA_1$ е равностранен триъгълник);
$\angle A_1MC = 75^\circ$ (от сбора на ъгли върху правата $AB$ при точка $M$);
$\angle MCA_1 = 75^\circ$ (външен ъгъл за $\triangle MCB$).
Значи $\triangle MCA_1$ е равнобедрен. Тогава $CA_1 = x$ и $\triangle AA_1C$ е равнобедрен и правоъгълен, следователно $\angle ACA_1 = 45^\circ$ и следователно $\angle ACM = 30^\circ$.
Ще пресметнем лицето на $\triangle ACM$ по два различни начина.
$S_{ACM} = \frac{AC.CM}{4}$, защото $\angle ACM = 30^\circ$, т.е. височината към $AC$ е равна на $MC/2$.
Да, но също така $M$ е среда на $AB$. Значи $S_{ACM} = \frac{S_{ABC}}{2} = \frac{BC.AA_1}{4} = \frac{BC.BM}{4}$.
От двете формули за лице директно получаваме търсеното.
**Оценяване.** (6 точки) 1т. за построение на $A_1$. 1т. за $AA_1 = AM = A_1M = BM$. 2т. за $\angle ACM = 30$. По 1т. за всяка от двете формули за лице на $\triangle ACM$.

**Задача 9.3** Наричаме $n$ прави в равнината *трипосочни*, ако могат да бъдат разделени в три непразни множества, $X$, $Y$, $Z$. Всеки две прави от едно и също множество са успоредни помежду си, никои две прави от различни множества не са успоредни помежду си и никои три прави не се пресичат в една точка.
С $S_n$ бележим максималният брой области, на които $n$ трипосочни прави могат да разделят равнината. Като за област считаме свързана част от равнината, не задължително крайна, чиито граници са определени от трипосочните прави.

Кое е най-голямото $n$ за което $S_n < 128$?

*Решение.* Ще изведем обща формула за броят на областите. Нека трите множества имат брой на елементите съответно $|X| = x$, $|Y| = y$ и $|Z| = z$. Първите две разделят равнината на общо $(x+1)(y+1)$ области. Всяка права от третото множество се пресича от останалите в $x+y$ точки и се разделя на $x+y+1$ части. Всяка от тях разделя една от получените вече области на две. Така получаваме обща формула:

$$S_{x,y,z} = (x+1)(y+1) + z(x+y+1) = x+y+z+xy+xz+yz+1.$$

Отбелязваме, че $n = x+y+z$. Освен това, имаме че $3(xy+yz+zx) \leq (x+y+z)^2 = n^2$ (еквивалентно на $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0$). Значи $S_{x,y,z} \leq n^2/3+n+1$, което е по-малко от 128 за $n = 18$ (всъщност, $S_{6,6,6} = 127$, т.е. $S_{18} = 127$). Също, $S_{6,6,7} = 140$, значи $S_n > 128$ за $n \geq 19$. Следователно отговорът е 18.

**Оценяване.** (7 точки) 3т. за извеждане на формулата за броят области. 3т. за ограничението отгоре с функция на $n$. 1т за довършване.

**Задача 9.4.** За нечетно естествено число $n > 1$ дефинираме множеството от различните остатъци на степени на двойката при деление на $n$:

$$S_n = \{a \mid a < n, \exists k \in \mathbb{N} : 2^k \equiv a \pmod{n}\}.$$

Съществуват ли различни нечетни числа $m$ и $r$ такива, че $S_m = S_r$?

*Решение.* Не! Съществува естествено число $s$, такова че $2^s \equiv 1 \pmod{n}$ (например $s = \varphi(n)$ от теоремата на Ойлер или понеже редицата от степените на 2 по модул $n$ е периодична). Имаме $2^{s-1} \equiv \frac{n+1}{2} \pmod{n}$ и значи $x = \frac{n+1}{2} \in S_n$, но $2x = n+1 > n$ не е в $S_n$. Също, ако $t \leq \frac{n-1}{2}$ е от $S_n$, то $2t < n$ също е. Следователно най-малкото естествено число $t$, такова че $t \in S_n$ и $2t \notin S_n$, е $\frac{n+1}{2}$. Понеже това число е различно за различни $n$, получаваме исканото.

**Оценяване.** (7 точки) 3 т. за обосновка, че $x \in S_n$, $2x \notin S_n$, е вярно за $x = \frac{n+1}{2}$; 3 т. за обосновка, че $x \leq \frac{n-1}{2}$ не изпълняват това свойство; 1 т. за довършване.

**Задача 10.1.** Реалните числа $x$ и $y$ удовлетворяват неравенството

$$x(x-6) \leq y(4-y) + 7.$$

Да се намери интервала от стойности за израза $a = x + 2y$.

*Отговор.* $a \in [-3; 17]$.

*Решение.* При $a = x + 2y$ имаме $x = a - 2y$, откъдето

$$\begin{aligned}
(a-2y)(a-2y-6) &\leq y(4-y)+7 \\
a^2-2ay-6a-2ay+4y^2+12y &\leq 4y-y^2+7 \\
5y^2-2(2a-4)y+(a^2-6a-7) &\leq 0 \\
D=(2a-4)^2-5(a^2-6a-7) &\geq 0 \\
4a^2-16a+16-5a^2+30a+35 &\geq 0 \\
a^2-14a-51 &\leq 0 \\
(a-17)(a+3) &\leq 0.
\end{aligned}$$

Окончателно, $a \in [-3; 17]$.

**Оценяване.** (6 точки) 2 т. за заместване в условието с $x = a-2y$; 1 т. за извеждане на квадратното неравенство спрямо $y$; 2 т. за положителност на дискриминантата и опростяване на формулата; 1 т. за отговор.

**Задача 10.2.** Даден е триъгълник $ABC$ с описана окръжност $k$ и център на вписаната окръжност $I$. Окръжност $\omega$ през точките $C$ и $I$ пресича страните $AC$ и $BC$ съответно в точките $P$ и $Q$, и пресича $k$ за втори път в точката $L$. Ъглополовящата на $\measuredangle ALB$ пресича страната $AB$ в точка $K$. Да се докаже, че големината на $\measuredangle PKQ$ не зависи от избора на окръжността $\omega$.

*Решение.* Явно $IP = IQ$ от ъглополовящата $CI$ в $\omega$. Целта ни е да докажем, че $IK = IP$. Наистина, тогава ще следва, че $I$ е център на описаната окръжност за триъгълник $PKQ$, откъдето $\measuredangle PKQ = \frac{1}{2}\measuredangle PIQ = 90^\circ - \frac{1}{2}\measuredangle ACB$.

Нека ъглополовящите $CI$ и $LK$ се пресичат в средата $T$ на дъгата $\widehat{AB}$ от $k$, несъдържаща $C$. Явно $\measuredangle TAK = \measuredangle TAB = \measuredangle BCT = \measuredangle ACT = \measuredangle ALT$, откъдето $\triangle AKT \sim \triangle LAT$ и $TA^2 = TK \cdot TL$. Предвид $TA = TI$ (следва от разписване на ъгли, известно е като лема на тризъбеца), получаваме $TI^2 = TK \cdot TL$ и $\triangle IKT \sim \triangle LIT$. Оттук

$$IK = IT \cdot \frac{LI}{LT} = AT \cdot \frac{LI}{LT}.$$

От друга страна, окръжностите $k$ и $\omega$ дават $\measuredangle LPI = 180^\circ - \measuredangle LCI = \measuredangle LAT$ и $\measuredangle PLI = \measuredangle PCI = \measuredangle ALT$. Оттук $\triangle LAT \sim \triangle LPI$, откъдето

$$\frac{LI}{LT} = \frac{PI}{AT}$$

и исканото следва.

**Оценяване.** (6 точки) 1 т. за твърдението, че $\measuredangle PKQ = 90^\circ - \frac{1}{2}\measuredangle ACB$; по 2 т. за $\triangle IKT \sim \triangle LIT$ и $\triangle LAT \sim \triangle LPI$; 1 т. за довършване.

**Задача 10.3.** За нечетно естествено число $n > 1$ дефинираме множеството от различните остатъци на степени на двойката при деление на $n$:

$$S_n = \{a \mid a < n, \exists k \in \mathbb{N} : 2^k \equiv a \pmod{n}\}.$$

Съществуват ли различни нечетни числа $m$ и $r$ такива, че $S_m = S_r$?

*Решение.* Виж задача 9.4.

**Оценяване.** (7 точки) 3 т. за обосновка, че $x \in S_n$, $2x \notin S_n$, е вярно за $x = \frac{n+1}{2}$; 3 т. за обосновка, че $x \leq \frac{n-1}{2}$ не изпълняват това свойство; 1 т. за довършване.

**Задача 10.4.** Ще наричаме граф $G$ *граф на делимости* ако във всеки от върховете му може да се запише различно естествено число така, че ребрата му да отговарят на всички двойки $(u, v)$ за които или $\dfrac{u}{v}$ или $\dfrac{v}{u}$ е цяло число. Да се докаже, че за всяко естествено число $n$ и всяко цяло число $0 \leq e \leq n(n-1)/2$ съществува граф на делимости с точно $n$ върха и $e$ ребра.

*Решение.* Разсъждаваме индуктивно по $n$, като в никой връх няма да записваме числото 1. За $n = 1$ исканото е ясно, за $n = 2$ пример с $e = 1$ е $(2, 4)$ и пример с $e = 0$ е $(2, 3)$. За $n = 3$ пример с $e = 0$ е $3, 5, 7$, пример с $e = 1$ е $2, 4, 7$, пример с $e = 2$ е $2, 4, 10$, пример с $e = 3$ е $2, 4, 8$.

За $n \geq 4$ имаме $n - 1 \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, значи поне едно от $e \geq n - 1$ и $e \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ е изпълнено. Нека първо $e \geq n - 1$. В пример с $n - 1$ върха и $e - (n - 1)$ ребра добавяме връх (от степен $n - 1$), като в него записваме просто число $p$, по-голямо от числата в останалите върхове, след което умножаваме числата в останалите върхове по $p$ – това не поражда нови ребра между останалите върхове.

Нека сега $e \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$. В пример с $n - 1$ върха и $e$ ребра добавяме връх (от степен 0), като в него записваме просто число $p$, по-голямо от числата в останалите върхове, и не променяме числата в останалите върхове – това не поражда нови ребра.

**Оценяване.** (7 точки) Непълни решения, в които подходът не е индуктивен, се оценяват с 0 точки. Индуктивни подходи с недовършен преход се оценяват с 1 точка. Индуктивни подходи с коректен преход, в които базата е грешна или използва числото 1 (ако това влияе на аргумента за стъпката), се оценяват с 5 точки.

**Задача 11.1.** Нека $a$ е реално число.

а) Да се намерят всички стойности на $a$, за които неравенството

$$x \log_{\frac{1}{2}} a^4 - x^2 > 3 + 2 \log_2 a^2$$

с неизвестно $x$ има решение.

б) Да се пресметне границата

$$\lim_{a \to -\infty} \left( \sqrt{a^2 - a + 1} + a \right).$$

*Решение.* а) Тъй като $\log_{\frac{1}{2}}(a^4) = -2. \log_2(a^2)$, то като положим $2 \log_2(a^2) = b$, получаваме неравенството $x^2 + b.x + 3 + b < 0$. За да има това неравенство поне едно решение, е необходимо и достатъчно $D = b^2 - 4b - 12 > 0$, чиито решения са $b < -2$ или $b > 6$, откъдето

$\log_2(a^2) < -1$ или $\log_2(a^2) > 3$. От свойствата на логаритмичната функция получаваме $a^2 < \dfrac{1}{2}$ или $a^2 > 8$ и $a \neq 0$. Окончателно

$$a \in \left(-\infty; -2\sqrt{2}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(2\sqrt{2}; \infty\right).$$

б) Тъй като $a < 0$, получаваме:

$$(1) \qquad \sqrt{a^2 - a + 1} + a = \frac{(\sqrt{a^2 - a + 1} + a)(\sqrt{a^2 - a + 1} - a)}{\sqrt{a^2 - a + 1} - a} = \frac{-1 + \frac{1}{a}}{-\sqrt{1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}} - 1}.$$

Следователно

$$\lim_{a \to -\infty} \left(\sqrt{a^2 - a + 1} + a\right) = \frac{1}{2}.$$

**Оценяване.** (6 точки) а) (3 точки); 1 т. за $\log_{\frac{1}{2}}(a^4) = -2.\log_2(a^2)$ и $x^2 + b.x + 3 + b < 0$; 1 т. за $D = b^2 - 4b - 12 > 0$ и за извода $\log_2 a^2 < -1$ или $\log_2 a^2 > 3$ и 1 т. за окончателния отговор; б) (3 точки); 2 т. за (1) и 1 т. за отговора $\dfrac{1}{2}$.

**Задача 11.2.** Даден е успоредник $ABCD$. Окръжност $k$ минава през върховете $A$ и $C$ и пресича лъчите $AB^{\rightarrow}$ и $AD^{\rightarrow}$ съответно в точките $E$ и $F$. Допирателната към окръжността $k$ в точка $C$ и правите $BD$ и $EF$ се пресичат в една точка. Да се докаже, че $AC$ е диаметър на $k$.

*Решение.* Нека допирателната към $k$ в точка $C$ пресича лъчите $AB^{\rightarrow}$ и $AD^{\rightarrow}$ съответно в точките $M$ и $N$, а правите $BD$, $EF$ и допирателната се пресичат в точка $P$. Прилагаме два пъти теоремата на Менелай за $\triangle AMN$ и за правите $BD$ и $EF$. Получаваме

$$\frac{AD}{ND}.\frac{NP}{MP}.\frac{MB}{AB} = 1 \text{ и } \frac{AF}{NF}.\frac{NP}{MP}.\frac{ME}{AE} = 1,$$

откъдето

$$(1) \qquad \frac{AD}{ND}.\frac{MB}{AB} = \frac{AF}{NF}.\frac{ME}{AE}.$$

Тъй като $ABCD$ е успоредник, то $\frac{AD}{ND} = \frac{MC}{NC} = \frac{MB}{AB}$ (2). От свойството на допирателната и секущите $MC^2 = ME.MA$ и $NC^2 = NF.NA$ (3). От (1), (2) и (3) следва, че

$$\frac{MC^2}{NC^2} = \frac{AF}{NF}.\frac{ME}{AE},$$

т.е. $\dfrac{ME.MA}{NF.NA} = \dfrac{AF}{NF}.\dfrac{ME}{AE}$, откъдето $\dfrac{MA}{NA} = \dfrac{AF}{AE}$. Следователно $AM.AE = AN.AF$, т. е. около четириъгълника $EFNM$ може да се опише окръжност. Тогава $\measuredangle AEF = \measuredangle ANM$, откъдето $\overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{AEC} - \overset{\frown}{FC}$, т. е. $\overset{\frown}{AEC} = \overset{\frown}{AFC}$. Оттук следва, че $AC$ е диаметър на $k$.

**Оценяване.** (6 точки) 1 т. за теоремата на Менелай и (1); 1 т. за (2); 1 т. за свойството на допирателната и секущите, 2 т. за извода, че $EFNM$ е вписан; 1 т. за окончателния извод.

**Задача 11.3.** Да се намерят всички естествени числа $n$, за които броят на положителните делители на НОК$(1, 2, \ldots, n)$ е степен на двойката.

*Решение.* (Първи начин) Ако $L = \text{НОК}(1, 2, \ldots, n) = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_t^{\alpha_t}$, то броят на положителните делители на $L$ е равен на $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_t + 1)$. За да бъде това число степен на двойката, трябва $\alpha_i = 2^{a_i} - 1$.
При $2^k \leq n < 2^{k+1}$ и $3^s \leq n < 3^{s+1}$ (тъй като $2^{k+1} > n \geq 3^s$, то $k \geq s$) имаме $L = 2^k.3^s.5^{\alpha_3} \ldots$ за $k \geq s \geq 1$. Следователно $k = 2^p - 1$ и $s = 2^q - 1$, като $p \geq q$.

1. Ако $p = q$, то $k = s$ и тогава $2^{k+1} > n \geq 3^k$, което е изпълнено при $k = 1$. При $k > 1$ по индукция следва, че неравенството не е изпълнено. Тъй като $n < 3^{s+1}$, получаваме $n < 9$.

2. Ако $p > q$ имаме $p \geq q + 1$ и тогава $k = 2^p - 1 \geq 2^{q+1} - 1 = 2(2^q - 1) + 1 = 2s + 1$. Получаваме:

$$3^{s+1} > n \geq 2^k \geq 2^{2s+1} = 2.4^s.$$

Горното неравенство е изпълнено при $s = 1$, а при $s > 1$ по индукция следва, че неравенството не е изпълнено. Тъй като $n < 3^{s+1}$, получаваме $n < 9$.

Получихме, че $n < 9$ и директна проверка показва, че решения са само $n = 1, 2, 3$ и 8.

(Втори начин) За всяко просто $p$ числата от интервала $n \in [p^2, p^3)$ не са решения, понеже степента на p в разлагането на НОК-а е 2, съответно допринася с множител 3 към броя на делителите и така този брой не е степен на 2. От постулата на Бертран за вско просто $p$ има просто $q$ с $p < q < 2p$, съответно $p^2 < q^2 < 4p^2 < p^3 < q^3$ за $p \geq 5$; също $3^2 < 5^2 < 3^3 < 5^3$. Следователно всеки интервала $[p^2, p^3)$ и $[q^2, q^3)$ за последователни прости числа $3 \leq p < q$ се пресичат. Получихме, че $n < 9$ и директна проверка показва, че решения са само $n = 1, 2, 3$ и 8.

**Оценяване.** (7 точки) При първото решение: 1 т. за формулата за брой на делителите и извода, че всички степени са степен на двойката минус 1; 1 т. за разглеждане на двете неравенства $2^k \leq n < 2^{k+1}$ и $3^s \leq n < 3^{s+1}$; 1 т. за случая $p = q$; 3 т. за случая $p > q$ (от тях 1 т. за $k \geq 2s + 1$); 1 т. за получаване на всички решения. При второто решение: 1 т. за формулата за брой на делителите и извода, че всички степени са степен на двойката минус 1; 1 т. за идея за прилагане на постулата на Бертран; 2 т. за отхвърлянето на $n \in [p^2, p^3)$ за просто $p$, 2 т. за обосновка, че $[p^2, p^3)$ и $[q^2, q^3)$ се пресичат за последователни прости $3 \leq p < q$, 1 т. за получаване на всички решения.

**Задача 11.4.** Във вътрешността на изпъкнал 2024-ъгълник $A_1 A_2 \ldots A_{2024}$ са избрани 1000 точки, така че никои три от всички 3024 точки не лежат на една права. Някои от точките са свързани с отсечки, които не се пресичат, като вътрешността на 2024-ъгълника е разделена на триъгълници. Във всяка една от всички 3024 точки е записано едно от числата 1, $-1$, 2 или $-2$, като за всяко $i = 1, 2, \ldots, 1012$ числата, записани на $A_i$ и $A_{i+1012}$, са противоположни. Да се докаже, че в някои два от върховете на някой от триъгълниците, на които е разделен 2024-ъгълника, са записани противоположни числа.

*Решение.* Ясно е, че ако има две съседни точки $A_i$ и $A_{i+1}$ с противоположни числа, задачата е решена. Без ограничение нека $A_1 = 1$ и да разгледаме всички отсечки $A_iA_{i+1}$ за $i = 1, 2, \ldots, 1012$. Тъй като $A_{1013} = -1$, то измежду разглежданите отсечки има нечетен брой, чиито краища са едно положително и едно отрицателно число. Тези две числа могат да бъдат $\{-1, 2\}$ или $\{1, -2\}$ и нека броят на отсечките с краища от първия вид да е $p$, а броят на отсечките с краища от втория вид да е $q$. Поради симетрията броят на отсеките $A_iA_{i+1}$ за $i = 1013, \ldots, 2024$ ($A_{2025} \equiv A_1$) с краища $\{1, -2\}$ е равен на $p$. Следователно всички отсечки с краища $\{1, -2\}$ са $p + q$, което е нечетно число.
Сега да разгледаме произволен триъгълник, който няма два върха с противоположни числа. Имаме следните възможности за трите числа:

$$(1, 1, -2), (1, 1, 2), (-1, -1, 2), (-1, -1, -2), (2, 2, -1), (2, 2, 1), (-2, -2, 1), (-2, -2, -1).$$

Всеки от тези триъгълници има четен брой (2 или 0) страни с краища 1 и $-2$. Следователно общият брой отсечки с краища 1 и $-2$ (броени с кратности) е четно число. Но всяка отсечка във вътрешността на 2024-ъгълника се брои два пъти (по веднъж от двата триъгълника, в които участва), а всяка отсечка, която е страна на 2024-ъгълника се брои по веднъж. Полученото противоречие показва, че съществува триъгълник с исканото свойство.

**Оценяване.** (7 точки) 1 т. за разглеждане на броя на страните на 2024-ъгълника с едно положително и едно отрицателно число, 1 т. за доказване, че броят на страните от този вид измежду $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{1012}A_{1013}$ е нечетен, 1 т. за доказване на броят на страните на 2024-ъгълника с $\{1, -2\}$ е нечетен, 3 т. за доказване, че всеки триъгълник, който не изпълнява исканото, съдържа четен брой страни с $\{1, -2\}$, 1 т. за довършване

**Задача 12.1.** Редицата $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ е такава, че

$$a_1 = 1 \text{ и } a_{n+1} = \frac{9a_n + 4}{a_n + 6} \text{ за всяко } n \in \mathbb{N}.$$

Кои членове на редицата са цели числа?

*Решение.* Очевидно всички членове на редицата са положителни. Ще докажем по индукция, че $a_n < 4$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. При $n = 1$ това е вярно и имаме

$$4 - a_{n+1} = \frac{20 - 5a_n}{a_n + 6} > 0$$

от индукционната хипотеза. Да забележим, че

$$a_{n+1} - a_n = \frac{-a_n^2 + 3a_n + 4}{a_n + 6} = \frac{(4 - a_n)(a_n + 1)}{a_n + 6} > 0$$

и следователно редицата е строго растяща. Тогава ако тя съдържа цяло число освен първия член, то трябва да е 2 или 3. Тъй като $a_2 = \frac{13}{7} < 2$, $a_3 = \frac{29}{11} \in (2, 3)$ и $a_4 = \frac{61}{19} > 3$, единствено $a_1$ е цяло число.

**Оценяване.** (6 точки) 2 т. за $a_n < 4$; 2 т. за строгата монотонност; 2 т. за довършване.

**Задача 12.2.** Точките $D$ и $E$ съответно върху страната $AC$ на $\triangle ABC$ и отсечката $BD$ са такива, че $\angle DAE = \angle AED = \angle ABC$. Да се докаже, че $BE = 2CD$ тогава и само тогава, когато $\angle ACB = 90^\circ$.

*Решение.* Нека $\alpha = \angle A$, $\beta = \angle B$ и $\gamma = \angle C$. Тогава

$$\frac{BE}{\sin(\alpha-\beta)} \overset{(1)}{=} \frac{AB}{\sin(\pi-\beta)}, \quad \frac{CD}{\sin(\alpha-\beta)} \overset{(2)}{=} \frac{BC}{\sin 2\beta}, \quad \frac{AB}{\sin\gamma} \overset{(3)}{=} \frac{BC}{\sin\alpha}$$

и значи

$$\frac{BE}{CD} = \frac{\sin 2\beta \sin\gamma}{\sin\beta\sin\alpha} \overset{(4)}{=} \frac{2\cos\beta\sin\gamma}{\sin\alpha} \overset{(5)}{=} \frac{2\cos\beta\sin\gamma}{\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma}.$$

Следователно (6) $BE = 2CD \Leftrightarrow \cos\gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = 90^\circ$.

**Оценяване.** (6 точки) По 1 т. за всяко (i).

**Задача 12.3.** Едно цяло число ще наричаме *студентско*, ако има вида $a^{33}$, където $a$ е цяло число. С $b(n)$, където $n$ е естествено число, ще означаваме най-малкия възможен брой студентски числа, чийто сбор е $n$. Например $b(2^{33}-1) = 2$. Крайно или безкрайно е множеството на естествените числа $n$, за които:

а) $b(n) = 12$ б) $b(n) = 12^{12^{12}}$?

*Решение.* а) От теоремата на Ферма и $y^2 \equiv 1 \pmod{67} \Leftrightarrow y \equiv \pm 1 \pmod{67}$ следва, че всяко студентско число дава остатък 0, 1 или 66 при деление на 67. Да разгледаме числата $12^{66k+1}$, където $k \in \mathbb{N}$. Те се представят като сума на 12 студентски числа. Освен това от теоремата на Ферма $12^{66k+1} \equiv 12 \pmod{67}$. Това показва, че $b(12^{66k+1}) = 12$ за всяко $k \in \mathbb{N}$. Следователно множеството в тази подточка е безкрайно.
б) За $P \in \mathbb{Z}[X]$ да положим $\Delta(P)(x) = P(x+1) - P(x)$. Ясно е, че ако $P$ е от степен $d$ със старши коефициент $a$, то $\Delta(P) \in \mathbb{Z}[X]$ е полином от степен $d-1$ със старши коефициент $ad$. Да разгледаме редицата от полиноми $P_1(x) = x^{33}$, $P_{k+1} = \Delta(P_k)$ за $k \in \mathbb{N}$. Лесно се вижда по индукция спрямо $k$, че за всеки $x \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}$ числото $P_k(x)$ е сума на $2^{k-1}$ студентски числа. Освен това имаме, че $P_{33}(x) = 33!x + b$ за някое $b \in \mathbb{Z}$. Тъй като 1 и $-1$ са студентски числа, всяко цяло число е сума на не повече от $2^{32} + 33! < 12^{12^{12}}$ студентски числа. Тогава множеството от тази подточка е празно, а значи и крайно.

**Оценяване.** (7 точки) За а) (общо 3т.): 1т. за $a^{33} \equiv 0, \pm 1 \pmod{67}$, 1т. за работеща конструкция, 1т. за доказателство, че конструкцията работи; за б) (общо 4т.): 1т. за идеята за намаляване на степента на полиноми чрез разлики, 2т. за доказване, че съществуват $a, b, c \in \mathbb{N}$ такива, че всяко естествено число, което дава остатък $b$ при деление на $a$, се записва като сума на $c$ студентски числа (в решението $a = 33!$ и $c = 2^{32}$), 1т. за довършване.

**Задача 12.4.** Нека $d \geq 3$ е естествено число. *Пълно $d$-мерно сдвояване* наричаме разбиване на множеството от двоични вектори с дължина $d$ на $2^{d-1}$ непресичащи се двойки, като векторите във всяка двойка се различават в точно една позиция. За зададено пълно $d$-мерно сдвояване $\mathcal{M}$ и естествено число $k \geq 2$, *алтерниращ цикъл с дължина* $2k$ наричаме циклична подредба на $2k$ различни двоични вектора, такива че всяка двойка съседни вектори се различават в точно една позиция и точно половината от тези двойки принадлежат на $\mathcal{M}$. Да се докаже, че за всяко пълно $d$-мерно сдвояване съществува алтерниращ цикъл с дължина най-много $2d-2$.

*Решение.* Да разгледаме граф $G$ с върхове двоичните вектори с дължина $d$ и ребра, свързващи двойките вектори, които се различават в точно една позиция. Нека $\mathcal{M}$ е пълно $d$-мерно сдвояване. Ще докажем, че за всеки връх $\mathbf{x} \in \{0,1\}^d$ на $G$ можем да намерим алтерниращ цикъл с дължина не повече от $2d-2$ измежду векторите на разстояние най-много 2 от $\mathbf{x}$. Нека $\mathbf{x} \in \{0,1\}^d$ има за съседи $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_d$ в $G$. Нека без ограничение на общността $\{\mathbf{x}, \mathbf{x}_1\} \in \mathcal{M}$, а векторите $\mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_d$ формират двойки в $\mathcal{M}$ респективно с $\mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_d$ (които са на разстояние 2 от $\mathbf{x}$). Да забележим, че всеки един от векторите $\mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_d$ има точно два съседа измежду $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_d$ в $G$. Ще разгледаме два случая:

**Случай 1.** Някой от векторите $\mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_d$, да кажем $\mathbf{y}_i$, е съсед на $\mathbf{x}_1$ в $G$. Тогава $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_i, \mathbf{x}_i$ формират алтерниращ цикъл с дължина $4 \leq 2d-2$.

**Случай 2.** Никой от векторите $\mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_d$ не е съсед на $\mathbf{x}_1$ в $G$. Да разгледаме следния алгоритъм. В началото, да поставим жетон във връх $\mathbf{x}_2$ и на всяка стъпка:

- ако жетонът се намира във връх $\mathbf{x}_i$ за някое $i \in \{2, \ldots, d\}$, го преместваме във връх $\mathbf{y}_i$;
- ако жетонът се намира във връх $\mathbf{y}_i$ за някое $i \in \{2, \ldots, d\}$, го преместваме в съседа на $\mathbf{y}_i$, различен от $x_i$.

Очевидно след не повече от $2d-2$ хода на алгоритъма някой връх ще бъде повторен. Тъй като алгоритъмът описва разходка върху графа $G$, където всяко нечетно ребро е в $\mathcal{M}$ и всяко четно ребро е извън $\mathcal{M}$, то той намира алтерниращ цикъл след най-много $2d-2$ хода, откъдето твърдението следва и в този случай.

**Оценяване.** (7 точки) 2 т. за въвеждане на графа $G$; 2 т. за разглеждане на частта от графа, съставена от върховете на разстояние най-много 2 от даден връх; 1 т. за първия случай; 2 т. за втория случай

**Задачите са предложени от:** 8.1, 8.3 – Ивайло Кортезов; 8.2, 8.4 – Мирослав Маринов; 9.1, 10.1 – Недялка Димитрова; 9.2, 9.3 – Константин Делчев; 9.4 (10.3) – Александър Иванов; 10.2 – Александър Иванов и Мирослав Маринов; 10.4 – Данила Черкашин; 11.1, 11.2 – Аделина Чопанова; 11.3, 11.4 – Емил Колев; 12.2 – Николай Николов; 12.1, 12.3 – Борислав Кирилов; 12.4 – Любен Личев