Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Пролетни математически състезания

Русе, 26 март 2022 г.

София, 2022 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 8.1. Даден е многочленът $P = (x^4 - 40x^2 + 144)(x^3 - 16x)$.
а) Разложете P на неразложими множители.
б) За числата $x = 10$ и $x = 91$ записваме стойностите на P в тях. На колко е равен най-големият общ делител на записаните числа?

Решение. а) $P = (x^4 - 36x^2 - 4x^2 + 144)(x^3 - 16x) = (x^2 - 36)(x^2 - 4)x(x^2 - 16) = (x-6)(x+6)(x-2)(x+2)x(x-4)(x+4)$.
б) При $x = 10$ стойността на P е $4.6.8.10.12.14.16 = 2^{14}.3^2.5.7$, а при $x = 91$ е нечетна, така че търсеният НОД е не повече от $3^2.5.7 = 315$. Тъй като $91 - 4 = 87$ се дели на 3, както и $91 + 2 = 93$, а пък $91 - 6 = 85$ се дели на 5 и 91 се дели на 7, то 315 дели $P(91)$. Следователно търсеният НОД е точно $3^2.5.7 = 315$.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за правилно пресмятане на p; 2 т. за правилно пресмятане на q; 2 т. за правилно решаване на вярното уравнение.

Коментар. За всяко цяло x числата $x-6$, $x-4$ и $x-2$ имат различни остатъци при деление на 3 (разликата на никои две не е кратна на 3), следователно някое от тези три числа е кратно на 3. Аналогично сред x, $x+2$, $x+4$ има още едно кратно на 3; сред $x-4$, $x-2$, x, $x+2$, $x+4$ има кратно на 5 и сред седемте множителя има кратно на 7. Следователно за всяко нечетно $x > 10$, НОД$(P(10), P(x)) = 315$.

Задача 8.2. Даден е триъгълник ABC с $AB = 1$ см, $BC = 2$ см и $AC = \sqrt{3}$ см. Точките D, E и F съответно от страните AB, AC и BC са такива, че $AE = BD$ и $BF = AD$. Ъглополовящата на $\measuredangle BAC$ пресича окръжността през точките A, D и E за втори път в точката M, а ъглополовящата на $\measuredangle ABC$ пресича окръжността през точките B, D и F за втори път в точката N. Да се намери дължината на отсечката MN.

Отговор. $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$.

Решение. От окръжността на ADE получаваме (чрез вписани ъгли и съответните им дъги) $MD = ME$ и $\measuredangle BDM = 180^\circ - \measuredangle ADM = \measuredangle AEM$, което заедно с $AE = BD$ означава, че $\triangle AEM \cong \triangle BDM$ – оттук $AM = MB$ и значи M е пресечната точка на симетралата на AB и ъглополовящата на $\measuredangle BAC$. Аналогично N е пресечната точка на симетралата на AB и ъглополовящата на $\measuredangle ABC$. В частност, заключаваме, че MN е симетралата на AB. Нека MN пресича AB в нейната среда K. Понеже $AB^2 + AC^2 = BC^2$, имаме $\measuredangle BAC = 90^\circ$ и сега $BC = 2AB$ дава $\measuredangle ABC = 60^\circ$. Оттук получаваме $\measuredangle MAK = 45^\circ$ и $\measuredangle NBK = 30^\circ$. Така триъгълникът AMK дава $MK = AK = \frac{1}{2}$, а триъгълникът BNK дава $NK = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ (ако $NK = y$, то $BN = 2y$ от $\measuredangle NBK = 30^\circ$ и Питагоровата теорема за BNK дава $y^2 + (\frac{1}{2})^2 = 4y^2$, т.е. $y = \frac{1}{2\sqrt{3}}$). Окончателно $MN = MK - NK = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$.

Оценяване.(6 точки) 1 т. за намиране на ъглите на ABC; 1 т. за $AM = MB$ (или $AN = NB$); 1 т. за въвеждането на K и $AK = KB$; 1 т. за намиране на MK; 1 т. за намиране на NK; 1 т. за верен отговор.

Задача 8.3. Дадени са неравенствата:

а) $(\frac{2a}{b+c})^2 + (\frac{2b}{c+a})^2 + (\frac{2c}{a+b})^2 \geq \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}$.
б) $(\frac{a+b}{c})^2 + (\frac{b+c}{a})^2 + (\frac{c+a}{b})^2 \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 9$.
За всяко от тях или докажете, че е вярно за всички положителни реални числа a, b и c, или дайте пример за тройка (a, b, c), която не го изпълнява.

Решение. а) Не, например при $a = 0.01$ и $b = c = 1000$.

б) Да! Нека означим $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{b}{c}$ и $z = \frac{c}{a}$ – тогава $xyz = 1$ и искаме $(xy+y)^2+(yz+z)^2+(zx+x)^2 \geq x+y+z+9$. С разкриване на скобите свеждаме до $x^2+y^2+z^2+2(xy^2+yz^2+zx^2)+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \geq x+y+z+9$. От неравенството между средноаритметично и средногеометрично имаме $xy^2 + yz^2 + zx^2 \geq 3\sqrt[3]{x^3y^3z^3} = 3$ и $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq 3\sqrt[3]{x^4y^4z^4} = 3$ и значи е достатъчно да докажем, че $x^2 + y^2 + z^2 \geq x + y + z$. С неравенството $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x+y+z)^2}{3}$ (еквивалентно на $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0$) свеждаме исканото до $\frac{(x+y+z)^2}{3} \geq x+y+z$, т.е. $x + y + z \geq 3$, като последното следва от $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за а); 5 т. за б), от които 1 т. за цялостен превод на условието в термините на споменатите x, y и z, 1 т. за $xy^2+yz^2+zx^2 \geq 3$, 1 т. за $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \geq 3$ и 2 т. за довършване; за б) идеи само с максимално разкрити скоби и съкратени събираеми, без други приноси, не носят точки.

Задача 8.4. Нека $p = (a_1; a_2; \ldots; a_{12})$ е пермутация на числата 1, 2, …, 12. Ще бележим $S_p = |a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\cdots+|a_{11}-a_{12}|$. Ще наричаме p оптимистична, ако $a_i > \min(a_{i-1}; a_{i+1})$ за всяко $i = 2, \ldots, 11$.
а) Коя е най-голямата възможна стойност на S_p? Колко са пермутациите p, при които тази стойност се реализира?
б) Колко са всички оптимистични p?
в) Коя е най-голямата възможна стойност на S_p за оптимистична p? Колко са оптимистичните p, при които тази стойност се реализира?

Решение. а) Ако поставим числата от p върху числовата ос, S_p е равно на дължината на „разходката“ от a_1 до a_2, после до a_3 и т.н. до a_{12}. В тази разходка отсечките:
1-2 и 11-12 участват най-много по 2 пъти (преди и след 1; преди и след 12);
2-3 и 10-11 участват най-много по 4 пъти (преди и след 1, 2, 11 и 12);
3-4 и 9-10 участват най-много по 6 пъти (преди и след 1, 2, 3, 10, 11 и 12);
4-5 и 8-9 участват най-много по 8 пъти (преди и след 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11 и 12);
5-6 и 7-8 участват най-много по 10 пъти (преди и след 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 12);
6-7 може да участва всичките 11 пъти.
Следователно $S_p \leq 2(2 + 4 + 6 + 8 + 10) + 11 = 2.30 + 11 = 71$. За да се постигне $S_p = 71$ е необходимо и достатъчно всички тези разходки да се реализират, всяка с желания брой пъти. Това се случва точно когато $a_1 = 6$ и $a_{12} = 7$ или обратно (2 варианта), като в първият случай $(a_2, a_4, \ldots, a_{10})$ е пермутация на $(8, 9, \ldots, 12)$ (5! варианта) и $(a_3, a_5, \ldots, a_{11})$ е пермутация на $(1, 2, \ldots, 5)$ (5! варианта), а във втория случай е наобратно. Общо търсените пермутации са $2.5!.5! = 28800$.

б) p е оптимистична точно когато числото 1 е на една от двете крайни позиции, след което 2 е на една от двете крайни сред останалите позиции, после 3 е на една от двете крайни сред останалите позиции и т.н. до 11, което е на една от двете останали позиции (и тогава позицията на 12 е единствена). Вариантите за това са $2^{11} = 2048$.

в) Във всяка оптимистична пермутация числата преди 12 са в нарастващ ред (ако $a_k = 12$, то непременно $a_{k-1} > a_{k-2}$, после $a_{k-2} > a_{k-3}$ и т.н.) а тези след 12 са в намаляващ ред (аналогично), така че $S_p = 12 - a_1 + 12 - a_{12} \leq 2.12 - 1 - 2 = 21$. Равенство се достига точно когато $a_1 = 1$, $a_{12} = 2$ или $a_1 = 2$, $a_{12} = 1$. Броят на реализиращите пермутации се намира както в б), като се отчете, че за числото 2 възможността е само една (определя се еднозначно според позицията на 1), т.е. търсеният брой е $2^{10} = 1024$.

Оценяване. (7 точки) а) 3 т., от които 1 т. за стойността на S_p и 2 т. за броя на реализациите; б) 2 т.; в) 2 т., от които 1 т. за стойността на S_p и 1 т. за броя на реализациите.

Задача 9.1. Дадена е квадратна функция $f(x)$ с цели коефициенти. Ако е известно, че $f(0)$, $f(3)$ и $f(4)$ приемат две по две различни стойности от множеството $\{2, 20, 202, 2022\}$, то да се определят всички възможни стойности на $f(1)$.

Отговор. $f(1) \in \{-80, -990\}$.

Решение. По теорема на Безу имаме, че $3 \mid |f(3) - f(0)|$, а $4 \mid |f(4) - f(0)|$. Измежду множеството $\{2, 20, 202, 2022\}$, единствено 2 и 20 дават еднакви остатъци при деление на 3, следователно $\{f(0), f(3)\} = \{2, 20\}$. При деление на 4, единствено 20 дава различен остатък от останалите и значи $f(0) \neq 20$. Оттук, $f(0) = 2$, $f(3) = 20$, а за $f(4)$ имаме две възможности: $f(4) = 202$ или $f(4) = 2022$.
Нека $f(x) = ax^2 + bx + c$. От $c = f(0) = 2$ и $9a + 3b + 2 = f(3) = 20$ получаваме, че $f(x) = ax^2 + (6 - 3a)x + 2$. При това $f(1) = 8 - 2a$. За да бъде f с цели коефициенти, то достатъчно е $a \in \mathbb{Z}$. Това е изпълнено, защото

$$a = \frac{f(4) - f(0)}{4} - \frac{f(3) - f(0)}{3}.$$

1сл. $f(4) = 202$. Тогава $a = 200/4 - 18/3 = 44$, а $f(1) = 8 - 2a = 8 - 88 = -80$.
2сл. $f(4) = 2022$. Тогава $a = 2020/4 - 18/3 = 499$, а $f(1) = 8 - 2a = 8 - 998 = -990$.
Окончателно, всички възможни стойности на $f(1)$ са $\{-80, -990\}$.

Оценяване. (6 точки) По 1 т. за $f(0) = 2$ и за $f(3) = 20$; по 2т. за всеки от случаите $f(4) = 202$ и $f(4) = 2022$.

Задача 9.2. Даден е триъгълник ABC с медиана CM ($M \in AB$) и център на описаната окръжност O. Известно е, че описаната около триъгълника AMO окръжност разполовява отсечката CM. Да се намери най-малкия възможен периметър на ABC, ако дължините на страните му са естествени числа.

Решение. Нека N и P са средите на AC и CM съответно. Тогава петоъгълникът $ANPOM$ е вписан в окръжност, като $AM \parallel PN$, откъдето $\measuredangle CAM = 180^\circ - \measuredangle ANP = 90^\circ - \measuredangle PNO = 90^\circ - \measuredangle PMO = \measuredangle AMC$, което е еквивалентно на $AC = CM$. Нека Q е средата на AM (явно $CQ \perp AB$). При $AC = b$, $BC = a$ и $AB = c$ имаме $CM^2 - MQ^2 = CQ^2 = BC^2 - BQ^2$, т.е. $b^2 - \frac{c^2}{16} = a^2 - \frac{9c^2}{16}$, което е еквивалентно на $2(a^2 - b^2) = c^2$. Явно $c = 2k$ е четно и

$(a-b)(a+b)=2k^2$, като множителите вляво са с еднаква четност. Значи при нечетно k няма решение – единият множител е винаги четен, а другият – нечетен. При $k=2$ остава само $a-b=2$, $a+b=4$, т.е. $a=3$, $b=1$, което с $c=4$ не изпълнява неравенството на триъгълника. При $k=4$ остават само $a-b=2$, $a+b=16$ (т.е. $a=9$, $b=7$ и $c=8$, което работи с периметър 24) и $a-b=4$, $a+b=8$ (т.е. $a=6$, $b=2$, което не работи с $c=8$). Остава да съобразим, че за $k\geq 6$ имаме $c\geq 12$ и $a+b+c>2c\geq 24$ от неравенството на триъгълника.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за вписаността на $ANPOM$; 1 т. за $AC=CM$; 1 т. за $2(a^2-b^2)=c^2$; 1 т. за отхвърляне на нечетните k; 1 т. за получаване на отговора и 1 т. за довършване на обосновката, че е минимален.

Задача 9.3. Да се намерят всички прости числа p, за които съществуват естествени числа x и y такива, че

$$\left|\begin{array}{l} p+49=2x^2 \\ p^2+49=2y^2 \end{array}\right. .$$

Решение. Ще докажем, че единствено $p=23$ е решение. Вадейки от второто уравнение първото, получаваме

$$p(p-1)=2(y-x)(y+x).$$

От първото уравнение имаме, че p – нечетно, значи $p\neq 2$ и $p\mid(y-x)(y+x)$. Ако допуснем, че $p\mid(y-x)$, тъй като очевидно $y>x$, стигаме до $p\leq y-x<y+x$. Следователно

$$2(y-x)(y+x)>2p^2>p^2>p(p-1),$$

противоречие. Следователно $p\mid(y+x)$.
Ако допуснем, че $y\geq p$, то от второто уравнение следва, че $49=2y^2-p^2\geq p^2$, т.е., $p\leq 7$. Директна проверка за $p=3,5,7$ ни дава, че нито едно от тях не води до решение (например, защото $26=\frac{3+49}{2}$, $27=\frac{5+49}{2}$, $28=\frac{7+49}{2}$ не са точни квадрати). Следователно, остана случая $y<p$, т.е., $x+y<2y<2p$ и значи $x+y=p$. Оттук $y-x=p-2x$, а също така

$$p-1=2(y-x)=2(p-2x)\ \Leftrightarrow\ p=4x-1\ \Leftrightarrow\ 2x^2-4x-48=0\ \Leftrightarrow\ x_{1,2}=1\pm 5.$$

Окончателно, понеже $-4<0$, получихме единствената възможност $x=6$, $p=4\cdot 6-1=23$ и $y=p-x=17$. Директна проверка потвърждава, че $23+49=2\cdot 6^2$, съответно $23^2+49=2\cdot 17^2$.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за $p\mid(y+x)$; 2 т. за разглеждане на случаите $p\leq 7$; 1 т. за свеждане до квадратно уравнение относно x; 2 т. за довършване

Задача 9.4. На подготовка за международната олимпиада по математика има 14 ученици. Всеки ученик има по поне k любими числа. Организаторите искат да дадат на всеки ученик тениска, върху която е надписано любимо число на ученика. Да се намери най-малкото естествено k, за което това винаги е възможно, ако:
а) учениците могат да се подредят в кръг и тениските трябва да се раздадат така, че всеки двама съседи по кръга са с тениска с различно число.

б) 7 от учениците са момчета, а другите 7 – момичета и тениските трябва да се раздадат така, че няма момче и момиче с тениски с едно и също число.
(Частите а) и б) са независими една от друга.)

Решение. а) Очевидно $k = 1$ не е възможно (ако двама съседи имат едно и също любимо число), ще докажем че $k = 2$ работи. Ако всички имат едни и същи две любими числа, да речем 1 и 2, то с редуване (1 за нечетните по кръга, 2 за четните) исканото ще е изпълнено. Значи можем без ограничение да считаме, че първият има любимо число A, което не е любимо за последния. Нека изборът ни от първия е A. За всеки следващ по кръга избираме негово любимо число, различно от това на предишния (ако и двете са различни от тези на предишния, избираме кое да е от тях). Ясно е, че за втория, третия, ..., 13-тия исканото е изпълнено, а за последния съобразяваме, че числото му е различно от на 13-тия поради предното изречение и че е различно от на първия поради избора на A.

б) Първо, $k \leq 3$ не е възможно – нека любимите числа на 7-те момчета са $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{1, 6, 7\}$, $\{2, 4, 6\}$, $\{2, 5, 7\}$, $\{3, 4, 7\}$, $\{3, 5, 6\}$, съответно; и същото за 7-те момичета. Без ограничение първото момче получава 1; тогава поне една двойка от (2, 3), (4,5) и (6,7) е получена от останалите и това пречи на някое от първите три момичета.
Сега ще покажем, че $k = 4$ работи. Можем да считаме, че всяко момче има точно 4 любими числа. Достатъчно е да докажем следното – има начин на всяка тениска да запишем М или Ж, след което всяко момче да забрави за тениските с любими числа с Ж и всяко момиче да забрави за тениските с любими числа с М, но в крайна сметка за всеки да остане по една подходяща тениска. Да забележим, че за всеки ученик събитието, в което всички тениски с негови любими числа са Ж, се случва в точно $\frac{1}{16}$ от всички възможни съпоставяния на М и Ж (понеже за всяко от 4-те момичета има 2 възможности и значи ЖЖЖЖ е само една от 2^4 възможности); аналогично за момиче с ММММ. Следователно пропорцията от съпоставяния, в които има момче с ЖЖЖЖ или момиче с ММММ, не надминава $14 \cdot \frac{1}{16} = \frac{7}{8}$; оттук в поне $\frac{1}{8}$ (и в частност, в поне едно) от възможните съпоставяния исканото е изпълнено.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за а), от които 1 т. за действия с какъв да е лаком алгоритъм и 1 т. за модифициране до работещ такъв; 5 т. за б), от които 1 т. за деклариране на контрапример при $k \leq 3$, 1 т. за проверката му, 1 т. формулиране на подходящо кодиране и 2 т. за довършване на $k = 4$.
Важни бележки. *За а)*: Най-лакомата стратегия, при която за първия избираме кое да е от неговите числа и след това за всеки следващ избираме кое да е, ненарушаващо исканото (надявайки се винаги да има такова), невинаги работи.
За б): Аргументът за $k = 4$ може да се запише и така – ако на всяко число изберем по случаен начин М или Ж, всяко с вероятност $\frac{1}{2}$, то за конкретен ученик вероятността да не останат възможни числа е най-много $\frac{1}{16}$, откъдето вероятността за поне един ученик да не останат възможни числа не надминава $14 \cdot \frac{1}{16} < 1$.

Задача 10.1. Ако $x, y, z \in \mathbb{R}$ са решения на системата

$$\left| \begin{array}{l} x - y + z - 1 = 0 \\ xy + 2z^2 - 6z + 1 = 0 \end{array} \right. ,$$

да се намери най-голямата стойност на $(x-1)^2 + (y+1)^2$?

Решение. От първото уравнение получаваме, че

$$y = x + z - 1.$$

Заместваме във второто и получаваме

$$x(x + z - 1) + 2z^2 - 6z + 1 = x^2 + (z-1)x + 2z^2 - 6z + 1 = 0.$$

Решаваме горното уравнение като квадратно спрямо x. Получаваме дискриминанта

$$\begin{aligned} D &= (z-1)^2 - 4(2z^2 - 6z + 1) \\ &= z^2 - 2z + 1 - 8z^2 + 24z - 4 \\ &= -7z^2 + 22z - 3. \end{aligned}$$

Следователно горното уравнение има решение за $z \in [\frac{1}{7}, 3]$.
Нека забележим, че

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + (y+1)^2 &= (y-x)^2 + 2xy + 2(y-x) + 2 \\ &= (z-1)^2 + 2(-2z^2 + 6z - 1) + 2(z-1) + 2 \\ &= -3z^2 + 12z - 1. \end{aligned}$$

Най-голямата стойност на този израз се достига във върха на параболата, т.е., при $z = (-12)/(-6) = 2$, което е в интервала на допустимите стойности и е равна на 11.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за изразяване на израза като функция на z; 1 т. за намиране на оптималната стойност за z; 1 т. за намиране на оптималната стойност на израза; 2 т. за проверка, дали получената стойност $z = 2$ е в дефиниционната област.

Задача 10.2. Даден е триъгълник ABC с център на вписаната окръжност I. Правата CI пресича описаната около триъгълник ABC окръжност за втори път в точка L, като $CI = 2 \cdot IL$. Точки M и N са върху страната AB, такива че $\measuredangle AIM = \measuredangle BIN = 90°$. Да се докаже, че $AB = 2 \cdot MN$.

Решение. Използваме стандартни означения за $\triangle ABC$. Нека да означим с точките P и Q съответно средите на страните AC и BC, а с J – центъра на външновписаната към страната AB окръжност. Както е добре известно (например, чрез стандартно изразяване на ъгли в $\triangle ALI$ и $\triangle ALJ$, откъдето $IL = AL = LJ$) $IL = LJ$, т.е., I е среда на CJ, откъдето PI е средна отсечка в триъгълник AJC и значи $PI \parallel AJ$, следователно $\measuredangle AIP = 90°$. Аналогично

$\measuredangle BIQ = 90^\circ$. Оттук $\triangle AIP \cong \triangle AMI$, респективно $\triangle BIQ \cong \triangle BIN$, т.е., $AP = AM$ и $BQ = NB$. Освен това, $r_c = 2r$. Сега от

$$S_{ABC} = p \cdot r = (p-c) \cdot r_c \quad \Rightarrow \quad p = 2(p-c) \quad \Rightarrow \quad 2c = \frac{a+b+c}{2}$$
$$\Rightarrow \quad AC + BC = 3AB \quad \Rightarrow \quad AM + AN = AP + BQ = \frac{AC+BC}{2} = \frac{3AB}{2}.$$

Но $AM + AN = AB + MN$ и значи $MN = AB/2$. Твърдението е доказано.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за подходящо изразяване на ъгли; 1 т. за "лемата за тризъбеца"; 3 т. за довършване.

Коментар. Вярно е и обратното твърдение, т.е., ако $AB = 2 \cdot MN$ то $CI = 2 \cdot IL$.

Задача 10.3. Пермутация σ на числата от 1 до 10 наричаме *лоша*, ако съществуват три числа i, j, k удовлетворяващи $1 \leq i < j < k \leq 10$ и $\sigma(j) < \sigma(k) < \sigma(i)$, и *добра* в противен случай. Да се намери броят на добрите пермутации.

Отговор. 16796.

Решение. Ще изведем затворена формула за добрите пермутации на числата от 1 до n. Да разгледаме добра пермутация σ, за която $j = \sigma^{-1}(1)$ е произволно естествено число между 1 и n. По дефиниция първите $j-1$ позиции съдържат числата $2, 3, ..., j$, които образуват добра пермутация на $j-1$ елемента, докато последните $n-j$ позиции съдържат числата $j+1, ..., n$, които образуват добра пермутация на $n-j$ елемента. Лесно се проверява, че горепосоченото условие е необходимо, но и достатъчно, за да конструираме произволна добра пермутация на n елемента. Тогава, означавайки с S_n броят на добрите пермутации на n елемента, заключаваме, че $(S_n)_{n\geq 0}$ удовлетворява $S_0 = 1$ и

$$S_n = \sum_{j=0}^{n-1} S_j S_{n-1-j}, \qquad \forall n \geq 1.$$

Разпознаваме рекурентната зависимост на числата на Каталан, откъдето $S_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. В частност

$$S_{10} = \frac{1}{11}\binom{20}{10} = \frac{12 \cdot 13 \cdots 20}{2 \cdot 3 \cdots 10} = 4 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 = 16796.$$

Оценяване. (7 точки) 4 т. за извеждане на рекурентната връзка за S_n (по 2т. за необходимост и достатъчност на рекурентното условие за "доброта" на пермутация); 3 т. за пресмятането в явен (затворен) вид на S_{10}.

Задача 10.4. Да се намери най-малкото нечетно просто число p, за което съществуват естествени, взаимно прости числа k и ℓ такива, че

$$4k - 3\ell = 12 \qquad \text{и} \qquad \ell^2 + \ell k + k^2 \equiv 3 \pmod{p}.$$

Отговор. 11.

Решение. От $4k = 12 + 3\ell$ виждаме, че k се дели на 3, т.е., $k = 3k_1$, $k_1 \in \mathbb{N}$. Аналогично $\ell = 4\ell_1$, $\ell_1 \in \mathbb{N}$. Ако допуснем, че $p = 3$ върши работа получаваме, че

$$3 \mid k \quad \& \quad 3 \mid \ell^2 + \ell k + k^2 \qquad \Rightarrow \qquad 3 \mid \ell \qquad \Rightarrow \qquad (k, \ell) \geq 3 > 1.$$

Противоречие с условието k и ℓ да са взаимно прости. Следователно $p > 3$ и $(3, p) = 1$. Тогава $(p, 9) = 1$ и значи ако умножим двете страни на модулното сравнение по 9 и елиминираме ℓ, ще получим еквивалентно тъждество, т.е.,

$$\begin{aligned}
\ell^2 + \ell k + k^2 \equiv 3 \pmod p \quad \Leftrightarrow \quad 9\ell^2 + 9\ell k + 9k^2 \equiv 27 \pmod p \qquad &\Longleftrightarrow \\
(4k-12)^2 + (4k-12)3k + 9k^2 \equiv 27 \pmod p \qquad &\Longleftrightarrow \\
16k^2 - 96k + 144 + 12k^2 - 36k + 9k^2 - 27 \equiv 0 \pmod p \qquad &\Longleftrightarrow \\
37k^2 - 132k + 117 \equiv 0 \pmod p \qquad &\Longrightarrow \\
(37k)^2 - 2 \cdot 66 \cdot 37 \cdot k + 117 \cdot 37 \equiv 0 \pmod p \qquad &\Longleftrightarrow \\
(37k - 66)^2 \equiv 66^2 - 117 \cdot 37 \equiv 27 \pmod p \qquad &\Longleftrightarrow \\
(37k_1 - 22)^2 \equiv 3 \pmod p. &
\end{aligned}$$

Следователно, необходимо условие е 3 да е квадратичен остатък по модул p. Тъй като квадратичните остатъци по модул 5 и 7 са съответно $\{0, 1, 4\}$ и $\{0, 1, 2, 4\}$, то 3 не е сред тях и значи $p \notin \{5, 7\}$, т.е., $p \geq 11$.

При $p = 11$ имаме, че $11 \mid 22$ и $37 \equiv 4 \pmod{11}$. Следователно търсим решение на сравнението $(4k_1)^2 \equiv 3 \pmod{11}$, което по модул 11 е еквивалентно на $k_1^2 \equiv 5 \pmod{11}$, т.е., $k_1 = 11k_2 + 4$ или $k_1 = 11k_2 + 7$.

$x \pmod{11}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x^2 \pmod{11}$	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1

Остава да проверим, дали можем да си гарантираме и $(k, \ell) = 1$. Имаме, че $k_1 = 1 + \ell_1$, т.е., $(k_1, \ell_1) = 1$. Следователно, достатъчно е $(k_1, 4) = 1$ и $(\ell_1, 3) = 1$. Това е така, например при $k_1 = 15$. Тогава $\ell_1 = 14$, $k = 45$, $\ell = 56$, $(k, \ell) = 1$, а от $k \equiv \ell \equiv 1 \pmod{11}$ проверяваме, че

$$\ell^2 + \ell k + k^2 \equiv 1^2 + 1 \cdot 1 + 1^2 \equiv 3 \pmod{11}.$$

Окончателно, отговорът на задачата е $p = 11$.

Оценяване. (7 точки) По 1 т. за изключване на всяка от възможностите $p = 3, 5, 7$; 2 т. за проверка, че $p = 11$ не води до модулно противоречие; 2 т. за работещ пример при $p = 11$.

Задача 11.1. Да се реши уравнението $(x+1)\log_3^2 x + 4x \log_3 x - 16 = 0$.

Решение. Допустимите стойности са $x > 0$. Полагаме $y = \log_3 x$ и получаваме $(x+1)y^2 + 4xy - 16 = 0$. Това уравнение е еквивалентно на $(y+4)(xy + y - 4) = 0$. Следователно $\log_3 x = -4$, откъдето $x = \dfrac{1}{81}$ или $\log_3 x = \dfrac{4}{x+1}$. Очевидно $x = 3$ е негово решение. Ако

$x > 3$, то $\log_3 x > \log_3 3 = 1$ (функцията $\log_3 x$ е растяща), а $\dfrac{4}{x+1} < 1$ (еквивалентно е на $4 < x+1$), откъдето следва, че уравнението няма решение при $x > 3$. Ако $0 < x < 3$, аналогично се доказва, че $\log_3 x < 1$, а $\dfrac{4}{x+1} > 1$ и отново уравнението няма решение. Окончателно $x_1 = 3$ и $x_2 = \dfrac{1}{81}$ са решенията на уравнението.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за определяне на допустимите стойности и разлагане във вида $(y+4)(xy+y-4) = 0$; 1 т. за намиране на $x_2 = \dfrac{1}{81}$ и $\log_3 x = \dfrac{4}{x+1}$; по 1 т. за разглеждане на двата случая за $x > 3$ и $0 < x < 3$ и изводите, че няма решение; 1 т. за окончателен отговор.

Задача 11.2. Окръжност през върховете A и B на $\triangle ABC$ пресича отсечките AC и BC съответно в точки P и Q. Ако $AQ = AC$, $\measuredangle BAQ = \measuredangle CBP$ и $\sqrt{2}AB = (\sqrt{3}+1)PQ$, намерете ъглите на триъгълника ABC.

Решение. При стандартни означения за елементите на триъгълник, имаме $\measuredangle BAQ = \measuredangle CBP = \measuredangle QBP = \measuredangle QAC$, т.е. AQ е ъглополовяща на $\measuredangle BAC$. От $AQ = AC$ получаваме

$$\gamma = \measuredangle AQC = \frac{\alpha}{2} + \beta = \frac{\alpha}{2} + (180^\circ - \alpha - \gamma),$$

откъдето $\gamma = 90 - \dfrac{\alpha}{4}$. Сега от синусовата теорема за вписания четириъгълник $ABQP$ получаваме:

$$\frac{AB}{\sin\measuredangle AQB} = \frac{PQ}{\sin\measuredangle PAQ} \iff \frac{AB}{\sin\gamma} = \frac{PQ}{\sin\frac{\alpha}{2}} \iff \frac{AB}{PQ} = \frac{\sin\gamma}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

От условието $\sqrt{2}AB = (\sqrt{3}+1)PQ$ намираме:

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \iff \frac{\cos\frac{\alpha}{4}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \iff \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{4}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}.$$

Следователно $\sin\dfrac{\alpha}{4} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \sin 15^\circ = \sin 165^\circ$ и тъй като $\dfrac{\alpha}{4} < 45^\circ$, то $\alpha = 60^\circ$, $\gamma = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{4} = 75^\circ$ и $\beta = 45^\circ$.

Забележка: $\sin 15^\circ = \sqrt{\dfrac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\dfrac{4-2\sqrt{3}}{8}} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за AQ – ъглополовяща; 1 т. за $\gamma = 90 - \dfrac{\alpha}{4}$; 2 т. за $\dfrac{1}{2\sin\frac{\alpha}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$; 1 т. за $\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$; 1 т. за намиране на ъглите.

Задача 11.3. Във всяка от клетките на таблица с n реда и m стълба е записана една от буквите a, b или c. Всеки два реда от таблицата съвпадат в най-много $k \geq 0$ позици и всеки две колони на таблицата съвпадат в най-много k позиции. Да се намерят m, n и k, ако

$$\frac{2mn+6k}{3(m+n)} \geq k+1.$$

Решение. Да означим редовете на таблицата с $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Нека $d(u_i, u_j)$ означава броят на позициите, в които редовете u_i и u_j се различават. От условието следва, че всеки два реда се различават в поне $m-k$ позиции, т.е. $d(u_i, u_j) \geq m-k$. Тогава:

$$S = \sum_{1 \leq i < j \leq n} d(u_i, u_j) \geq \frac{n(n-1)}{2}(m-k). \tag{1}$$

Да разгледаме произволен стълб на таблицата и нека в него има x букви a, y букви b и z букви c, като $x+y+z=n$. Приносът на този стълб към S е $xy+xz+yz$ и от неравенството

$$n^2 = (x+y+z)^2 \geq 3(xy+xz+yz)$$

следва, че всеки стълб добавя най-много $\frac{n^2}{3}$ към S (това се случва само когато n се дели на 3 и във всеки стълб има точно по $\frac{n}{3}$ от всяка буква). Сега от (1) следва:

$$\frac{mn^2}{3} \geq S \geq \frac{n(n-1)}{2}(m-k) \iff mn+3k \leq 3kn+3m. \tag{2}$$

След аналогични разсъждения за стълбовете на таблицата, получаваме:

$$mn+3k \leq 3km+3n. \tag{3}$$

След събиране на неравенства (2) и (3), намираме

$$2mn+6k \leq 3(m+n)(k+1) \iff \frac{2mn+6k}{3(m+n)} \leq k+1.$$

Тъй като по условие е изпълнено обратното неравенство, намираме $\frac{2mn+6k}{3(m+n)} = k+1$ и следователно $mn+3k = 3kn+3m$ и $mn+3k = 3km+3n$ (това означава също, че m и n се делят на 3). От $3kn+3m = 3km+3n \iff (k-1)(n-m) = 0$ получаваме $k=1$ или $m=n$. При $k=1$ имаме $mn+3 = 3m+3n$, което е невъзможно, защото m и n се делят на 3 и дясната част се дели на 9, а лявата – не. При $m=n$ получаваме квадратно уравнение $m^2-3(k+1)m+3k=0$, чиято дискриминанта $9k^2+18k+9-12k = (3k+1)^2+8$ трябва да е точен квадрат. От $(3k+1)^2+8=t^2$ получаваме, че разлика на два квадрата е равна на 8, което е възможно само при $t=3$ и $k=0$. Тогава $m=n=3$ и таблицата е:

a	b	c
b	c	a
c	a	b

Оценяване. (7 точки) 1 т. за неравенството (1); 1 т. за това, че всеки стълб добавя най-много $\dfrac{n^2}{3}$ към S; 1 т. за нервенство (2); 1 т. за получаване, че в (2) и (3) има равенства; 1 т. за случая $k=1$; 1 т. за случая $m=n$; 1 т. за примера при $m=n=3$.

Задача 11.4. Нека $n \geq 2$ е дадено естествено число. Множеството M се състои от $2n^2-3n+2$ положителни рационални числа. Да се докаже, че съществува подмножество A на M с n елемента със следното свойство: за всяко естествено число k, $2 \leq k \leq n$ сборът на произволни k (не непременно различни) числа от A не е число от A.

Решение. Без ограничение на общността, можем да считаме числата в M за естествени, защото можем да ги умножим с НОК на знаменателите им и това не влияе на свойството в условието.

Прогресията $\{(2n-1)q+n\}_{q=1}^{\infty}$ съдържа безкрайно много прости числа, съгласно теоремата на Дирихле и $\big((2n-1),n\big)=1$. Нека да изберем просто число $p=(2n-1)q+n$, което е по-голямо от числата в M, т.е., M става множество от остатъци по модул p. Да разгледаме следното множество от остатъци:

$$\mathcal{P}=\left\{\frac{p+n-1}{2n-1},\frac{p+3n-2}{2n-1},\dots,\frac{2p-1}{2n-1}\right\},$$

където числителя на всяка следваща дроб надвишава този на предходната с $2n-1$. Съгласно избора на p всички числа в $\mathcal{P}$ са естествени. Освен това, имаме

$$2\cdot\frac{p+n-1}{2n-1}=\frac{2p-1}{2n-1}+1 \quad \text{и} \quad n\cdot\frac{2p-1}{2n-1}=p+\frac{p-n}{2n-1}.$$

Това означава, че по модул p, сумата на няколко числа (поне 2 и най-много n) не е елемент на $\mathcal{P}$!

Да забележим, че $|\mathcal{P}|=\dfrac{2p-1}{2n-1}-\dfrac{p-n}{2n-1}=\dfrac{p+n-1}{2n-1}$. Нека $M=\{m_1,m_2,\dots,m_{2n^2-3n+2}\}$. За всяко $i=1,2,\dots,2n^3-3n+2$, числата $\{m_i\cdot 1,m_i\cdot 2,\dots,m_i\cdot(p-1)\}$ образуват пермутация на $\{1,2,\dots,(p-1)\} \pmod p$, т.е., точно $\dfrac{p+n-1}{2n-1}$ от тях са елементи на $\mathcal{P}$!

Следователно, съществува $k\in\{1,2,\dots,p-1\}$ такова, че измежду числата

$$\{k\cdot m_1,k\cdot m_2,\dots,k\cdot m_{2n^2-3n+2}\}$$

поне

$$\frac{(2n^2-3n+2)\cdot\frac{p+n-1}{2n-1}}{p-1}>\frac{2n^2-3n+2}{2n-1}>n-1$$

са елементи на $\mathcal{P}$ по модул p. Лесно се съобразява, че съответните числа $\{m_j\}$ (поне n) от множеството M, за които $k\cdot m_j\in\mathcal{P} \pmod p$, удовлетворяват условието. В частност и всяко тяхно подмножество с точно n елемента.

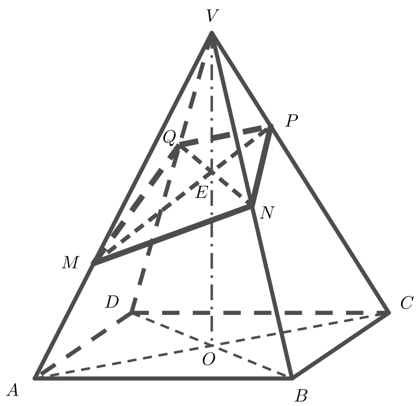
Оценяване. (7 точки) 1 т. за идеята за разглеждане числата като остатъци по прост модул; 1 т. за въвеждане на простото число $p=(2n-1)q+n$; 2 т. за дефиниране на множеството $\mathcal{P}$; 1 т. за доказателството, че $\mathcal{P}$ е "отворено" относно събиране по модул p; 2 т. за оценяването.

Задача 12.1. В окръжност k е вписан четириъгълникът $ABCD$, за който $S_{ACB} = s$, $S_{ACD} = t$ и $s < t$. Да се намери най-малката стойност на израза $A = \dfrac{4s^2+t^2}{5st}$ и да се посочи кога се достига тя.

Решение. По условие имаме $0 < s < t$, т.е. достъчно е да намерим най-малката стойност на израза $B(y) = \dfrac{4}{5}\ y + \dfrac{1}{5y}$, където $0 < y = \dfrac{s}{t} < 1$. Изследването на $B(y)$ може да се извърши по различни начини (напр. с помощта на производни), но ние ще представим един по-елементарен подход към намирането на стойностите на $B(y)$.
Нека $k = \dfrac{4}{5}\ y + \dfrac{1}{5y}$, т.е. $4y^2 - 5ky + 1 = 0$, тогава въпросът къде се изменя $k = \dfrac{4}{5}\ y + \dfrac{1}{5y}$, когато $y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ може да се замении с въпроса колко трябва да бъде k в $4y^2 - 5ky + 1 = 0$, за да бъде $y \in \mathbb{R}$. Отговорът на последния въпрос се дава от израза $D = 25k^2 - 16 \geqq 0$, т.е. $k \in \left(-\infty, -\dfrac{4}{5}\right] \cup \left[\dfrac{4}{5}, \infty\right)$. Понеже $y > 0$, то $k > 0$ и следователно най-малката стойност на k $\big(B(y)\big)$ е $k = \dfrac{4}{5}$, която се достига за $y = \dfrac{1}{2}$. Така окончателно получаваме, че най-малката стойност на израза $A = \dfrac{4s^2+t^2}{5st}$ е $\dfrac{4}{5}$ и тя се достига при $t = 2s$. Очевидно такива геометрични конструкции съществуват (достатъчно е да изберем точките B и D, така че $2d(B, AC) = d(D, AC)$).

Оценяване. (6 точки) 1 т. за получаване на функция на една променлива, която има същия минимум както A; 3 т. за намиране на най-малката стойност на A; 1 т. за определяне на стойностите на s и t, за които се достига минималната стойност; 1 т. за показване, че съществува геометрична конструкция, съответна на намерените s и t.

Задача 12.2. Дадена е правилна четириъгълна пирамида $ABCDV$ с връх точката V. Равнина λ пресича околните ръбове VA, VB, VC и VD съответно в точките M,N, P и Q. Да се намери отношението $VQ : QD = p : q$, ако $VM : MA = 2 : 1$, $VN : NB = 1 : 1$ и $VP : PC = 1 : 2$.



Решение. Нека $l = VA = VB = VC = VD$ е околният ръб на пирамидата, $\sphericalangle AVC = 2\varphi$ и да означим с E прободът на телесната височина VO на пирамидата с равнината λ. Понеже $\lambda \cap (ACV) = MP$, $\lambda \cap (BDV) = NQ$ и $(ACV) \cap (BDV) = VO$, то точката E ще бъде пресечна точка на диагоналите на четириъгълника $MNPQ$ ($E = MP \cap NQ$).
Тогава имаме $VM = \dfrac{2}{3}\,l$, $VN = \dfrac{1}{2}\,l$, $VP = \dfrac{1}{3}\,l$, $VQ = \dfrac{p}{p+q}\,l$ и отсечката VE е ъглополовяща в триъгълниците MPV и NQV. Сега от формулата за ъглополовящата в триъгълника $\left(l_c = \dfrac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}\right)$ имаме $VE = \dfrac{2\cos\varphi\cdot\frac{2}{3}\,l\cdot\frac{1}{3}\,l}{\frac{2}{3}\,l + \frac{1}{3}\,l} = \dfrac{2\cos\varphi\cdot\frac{1}{2}\,l\cdot\frac{p}{p+q}\,l}{\frac{1}{2}\,l + \frac{p}{p+q}\,l}$ или $\dfrac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p+q}}{\frac{1}{2}+\frac{p}{p+q}}$, откъдето получаваме $\dfrac{p}{p+q} = \dfrac{2}{5}$ или $\dfrac{p}{q} = \dfrac{2}{3}$. Така окончателно получаваме, че отношението $VQ : QD = 2 : 3$.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за достигане до факта, че пресечната точка на диагоналите на сечението лежи на телесната височина; 4 т. за намиране на търсеното отношение.

Задача 12.3. Дадени са полиноми с реални коефициенти P и Q, като Q е от степен 2021 и реални числа $a_1, a_2, \dots, a_{2022}, b_1, b_2, \dots, b_{2022}$, за които $a_1a_2\dots a_{2022} \neq 0$. Ако за всяко реално число x е изпълнено равенството

$$P(a_1Q(x) + b_1) + \dots + P(a_{2021}Q(x) + b_{2021}) = P(a_{2022}Q(x) + b_{2022}),$$

да се докаже, че $P(x)$ има поне един реален корен.

Решение. Ако P е константа, то $P \equiv 0$. Ако съществуват две числа a, b, такива че $P(a) < 0$ и $P(b) > 0$, то от съображения за непрекъснатост следва, че P има корен между a и b. Ако не съществуват такива a, b, то P приема или само положителни, или само отрицателни стойности. БОО можем да приемем, че $P(x) > 0$ за всяко реално x. Ако $a_i \neq a_{2022}$ за някое i, то понеже Q е от нечетна степен, съществува x_0, за което $Q(x_0) = \frac{b_{2022}-b_i}{a_i-a_{2022}}$ и от тук следва, че

$$P(a_1Q(x_0)+b_1)+\dots+P(a_{i-1}Q(x_0)+b_{i-1})+P(a_{i+1}Q(x_0)+b_{i+1})+\dots+P(a_{2021}Q(x_0)+b_{2021}) = 0,$$

което е противоречие, защото $P(x) > 0$ за всяко x. Следователно $a_1 = a_2 = \dots = a_{2022} = a$, което означава, че

$$P(aQ(x) + b_1) + \dots + P(aQ(x) + b_{2021}) = P(aQ(x) + b_{2022}).$$

Тогава ако b и c са старшите коефициенти на P и Q съответно, а $d = \deg P$, то старшият коефициент на лявата страна е равен на $2021ba^dc^d$, а този на дясната страна е ba^dc^d и т.к $a \neq 0$ и $c \neq 0$, то получаваме, че $b = 0$, тоест $P(x) \equiv 0$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за БОО $P(x) > 0$ за всяко x; 3 т. за случая $a_i \neq a_{2022}$ за някое i; 3 т. за довършване.

Задача 12.4. Нека m и n са естествени числа, а p е просто число. Да се намери максималното естествено число s (като функция на m, n и p) такова, че от произволен набор от mnp

естествени числа могат да се изберат snp от тях, които имат следното свойство:
Могат да се разбият на s непресичащи се подмножества от по np елемента, така че сумата от елементите на всяко от подмножествата дава един и същи остатък при деление с p.

Решение. Отговор: $s = m-1$. Първо да допуснем, че $s = m$. Тогава да разгледаме множество от $mnp-1$ числа, даващи остатък $1 \pmod p$ и едно число, даващо остатък 0. Ясно е, че то не изпълнява условието, защото всички суми освен една дават остатък нула. Следователно $s \leq m-1$. Сега ще докажем следната

Лема. Сред всеки $np+p-1$ има np от тях със сума, кратна на p.

Доказателство. Ще докажем твърдението с индукция по n. За базовия случай $n = 1$ трябва да докажем, че сред всеки $2p-1$ естествени числа има p със сума кратна на p. Ще докажем с индукция по k, че за всяко $p \geq k \geq 2$ множеството от остатъците на сумите на k от елементите на произволно $(2k-1)-$елементно множество, което не съдържа k равни елементи. За $k = 2$ твърдението се проверява директно. Сега нека сме го доказали за $k \leq p-1$ и нека различните суми дават остатъци $s_1, s_2, \dots, s_k$. Тогава за новото множество от $2k+1$ елемента, да разгледаме два различни негови елемента a и b и да приложим индукционната хипотеза за останалото множество(ясно е, че можем да изберем и b, така че да можем да приложим индукционната хипотеза). Сега да разгледаме множествата $\{s_1+a, s_2+a, \dots, s_k+a\}$ и $\{s_1+b, s_2+b, \dots, s_k+b\}$. Ако те не съвпадат, получаваме $k+1$ различни суми, а ако допуснем, че съвпадат, то след сумиране получаваме, че $a \equiv b \pmod p$. Сега твърдението за $n = 1$ следва директно. Сега, ако сме избрали множество с $(n-1)p$ елемента, то сред останалите $2p-1$ има p със сума, кратна на p и така индукцията е завършена.

Прилагайки последователно лемата, отделяйки на всяка стъпка по np елемента със сума $0 \pmod p$ получаваме $m-1$ множества със сума на елементите $0 \pmod p$ и така задачата е решена.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за пример; 4 т. за лемата, от които 3 за случая $n = 1$; 1 т. за довършване.

Задачите са предложени от: 8.1, 8.4 – Ивайло Кортезов; 8.2, 8.3, 9.2, 9.4 – Мирослав Маринов; 9.1 – Иван Ангелов; 9.3, 10.4 – Станислав Харизанов; 10.1 – Катерина Велчева; 10.2, 11.4 – Александър Иванов; 10.3 – Любен Личев; 11.1 – Аделина Чопанова; 11.2 – Аделина Чопанова и Емил Колев; 11.3 – Емил Колев; 12.1, 12.2 – Веселин Гушев; 12.3, 12.4 – Кристиян Василев.